ELEMENTARNE FUNKCIJE

Matematika sa statističkom analizom

Farmaceutsko - biokemijski fakultet

Akademska god. 2018./2019.

Uvod

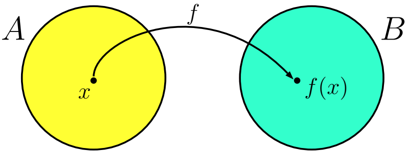
Elementarne funkcije:

- polinomi
- racionalne funkcije
- eksponencijalne funkcije
- logaritamske funkcije
- opće potencije
- trigonometrijske funkcije
- ciklometrijske funkcije

▷ neka su $A, B \neq \emptyset$

Funkcija je pravilo po kojem svakom elementu skupa A pridružujemo točno jedan element skupa B.

$$f : A \to B$$



- A - *domena* ili *područje definicije* funkcije
  $(D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\})$
- B - *kodomena* ili *područje vrijednosti* funkcije

Uvod

Možemo pisati: $y = f(x), \;\; x \in A, \;\; y \in B$

- x - *nezavisna varijabla*
- y - *slika* od x

Slika funkcije f je skup slika svih elemenata domene i označava se sa $\mathrm{Im}\, f$.

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \in B \; : \; x \in A\}$$

Graf funkcije f je skup točaka:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \; : \; x \in A\}$$

▷ Promatrat ćemo isključivo *realne funkcije realne varijable* ($A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$).

Uvod

Funkcija f je:

- *parna* ako za svaki x iz domene vrijedi $f(-x) = f(x)$
- *neparna* ako za svaki x iz domene vrijedi $f(-x) = -f(x)$
- *periodična* s periodom T ako za svaki x iz domene vrijedi $f(x) = f(x + nT), n \in \mathbb{Z}$

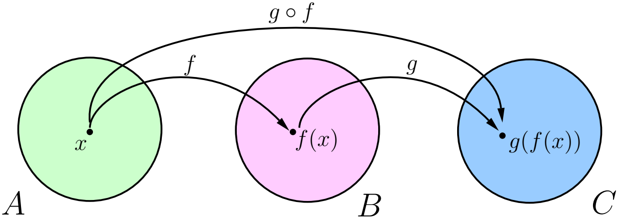
- Navedite po jedan primjer za svaku od ovih funkcija!

Kompozicija funkcija

▷ $f : A \to B$, $g : B \to C$

Kompoziciju funkcija f i g, $g \circ f : A \to C$, definiramo sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$



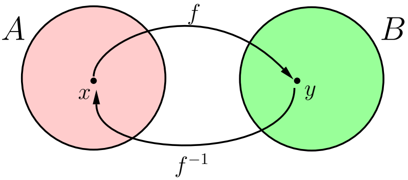
Napomena: $g \circ f \neq f \circ g$

Inverzna funkcija

▷ $f : A \to B$ bijekcija (injekcija i surjekcija)

Tada postoji *inverzna funkcija* funkcije f, $f^{-1} : B \to A$, definirana sa

$$f^{-1}(y) = x, \quad y \in B, \text{ gdje je } x \text{ takav da je } f(x) = y.$$



Vrijedi:

- $(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad y \in B \quad$ (identiteta na B)
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in A \quad$ (identiteta na A)

▷ Graf inverzne funkcije simetričan je grafu funkcije obzirom na pravac $y = x$

Polinomi

Polinom n-tog stupnja je funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Realni brojevi $a_0, a_1, \ldots a_n$ nazivaju se *koeficijenti* polinoma p, pri čemu je:

- a_n *vodeći koeficijent*
- a_0 *slobodni član*

Polinom $p(x) = 0$ kojemu su svi koeficijenti jednaki nula naziva se *nul-polinom*.

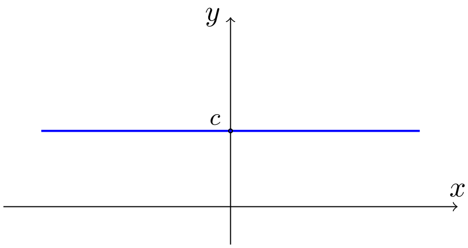
Teorem 1

Polinom stupnja $n, n \geq 1$, može imati najviše n različitih nultočaka.

Polinom 0-tog stupnja je konstanta,

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

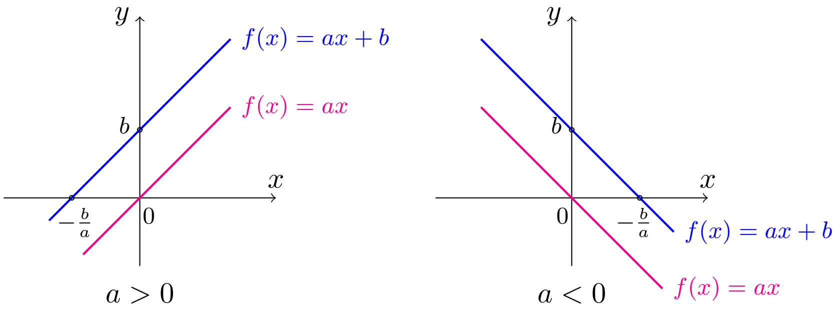
Graf je pravac paralelan sa x-osi koji prolazi točkom $(0, c)$.



Polinom prvog stupnja je funkcija zadana formulom

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0. \quad \text{(afina funkcija)}$$

Nultočka ovog polinoma je rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, tj. $x = -\dfrac{b}{a}$.



Polinomi

Polinom drugog stupnja je funkcija oblika:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Graf polinoma drugog stupnja je **parabola** čije su nultočke dane formulom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

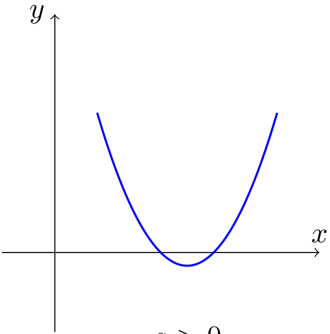
Tada se svaki polinom može zapisati (faktorizirati) kao:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

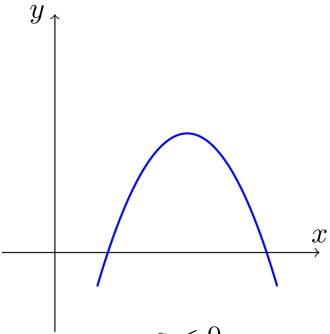
Izraz $D = b^2 - 4ac$ naziva se *diskriminanta* i broj nultočaka polinoma ovisi o odnosu broja D naspram nule.

Polinomi

1. $D > 0 \Rightarrow$ polinom ima dvije različite realne nultočke

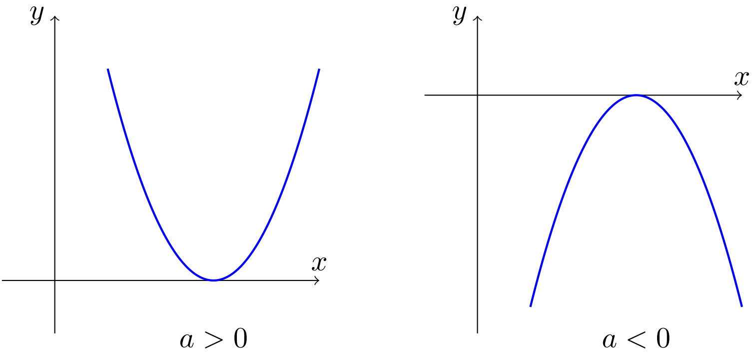


$a > 0$

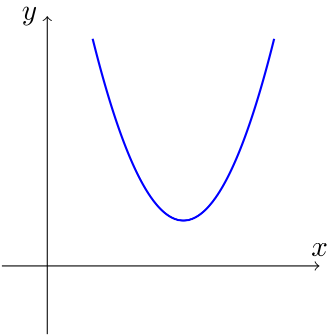


$a < 0$

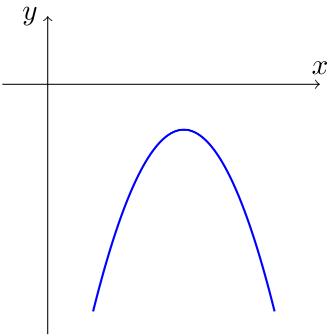
2. $D = 0 \Rightarrow$ polinom ima jednu dvostruku nultočku $x = -\dfrac{b}{2a}$ (tjeme parabole)



3. $D < 0 \Rightarrow$ polinom nema realnih nultočaka (graf ne siječe x-os)



$a > 0$



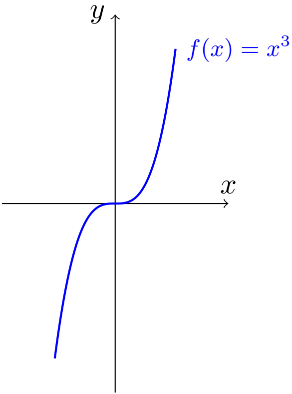
$a < 0$

U ovom slučaju, nultočke su konjugirano kompleksan par brojeva.

Polinom trećeg stupnja je funkcija oblika

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

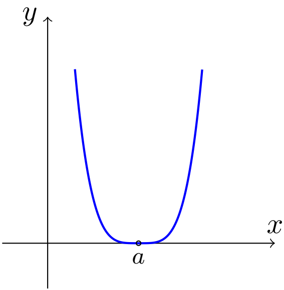
i njezin se graf naziva *kubna parabola*.



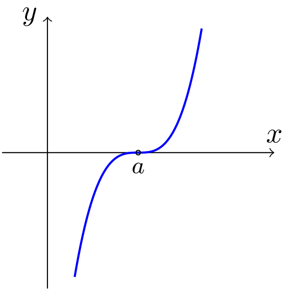
Graf polinoma n-tog stupnja oblika

$$f(x) = (x-a)^n, n \geq 2$$

općenito izgleda ovako:



n paran



n neparan

Racionalna funkcija

Funkcija oblika $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $\quad g(x), h(x) \neq 0$ polinomi

- st.$g <$ st.$h \quad \Rightarrow \quad f$ je prava racionalna funkcija
- st.$g \geq$ st.$h \quad \Rightarrow \quad$ je neprava racionalna funkcija i u tom slučaju polinomi se mogu podijeliti

Primjer 2

Funkcija $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^5 - 4x^2 + 1}$ *je prava racionalna funkcija.*

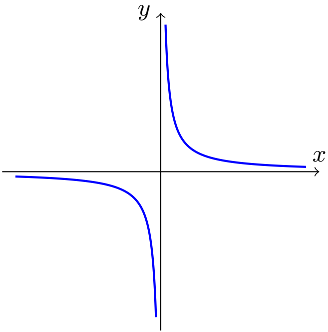
Primjer 3 (dijeljenje polinoma)

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x - 1} = x - 4 - \dfrac{2}{x - 1}$

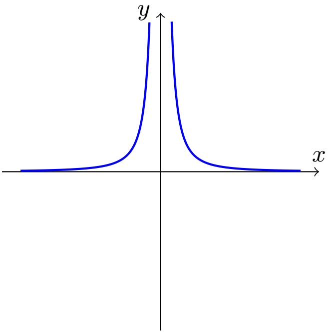
(b) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 5x - 7}{x^2 - 3} = x^2 + 2x + 3 + \dfrac{x + 2}{x^2 - 3}$

Racionalna funkcija

Graf funkcije oblika $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

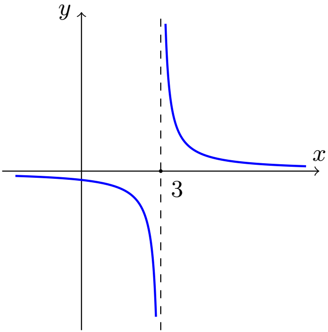


$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, n neparan

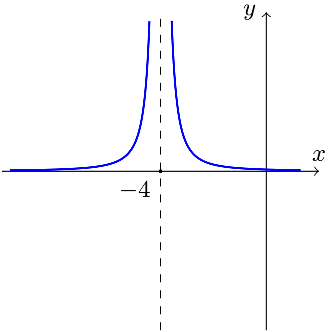


$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, n paran

Graf funkcije oblika $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$



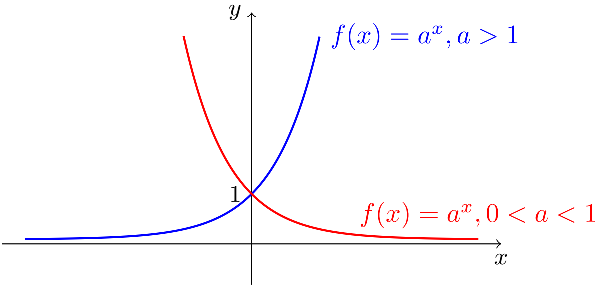
$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$



$$f(x) = \frac{1}{(x+4)^2}$$

Eksponencijalna funkcija s bazom a je funkcija oblika

$$f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

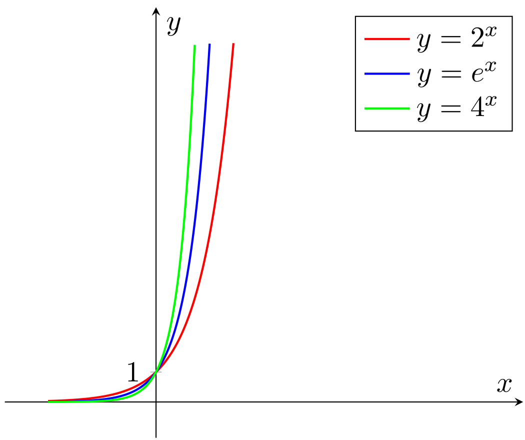


Vrijede sljedeća svojstva:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

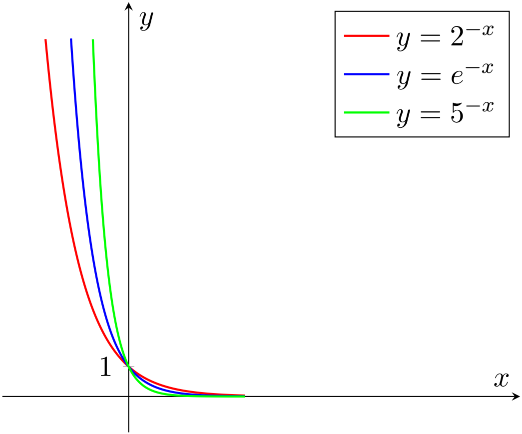
Eksponencijalna funkcija

Graf funkcije $f(x) = a^x$ za različite baze a



Eksponencijalna funkcija

Graf funkcije $f(x) = a^x$ za različite baze a



Logaritamska funkcija

Inverznu funkciju eksponencijalne funkcije a^x zovemo *logaritamska funkcija s bazom* a i označavamo sa

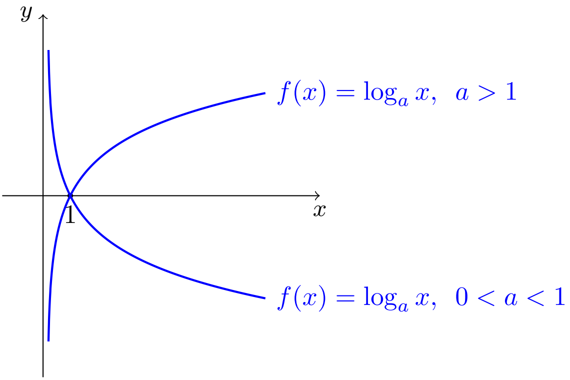
$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

Vrijede sljedeća svojstva:

- $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^\lambda = \lambda \log_a x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$

Logaritamska funkcija

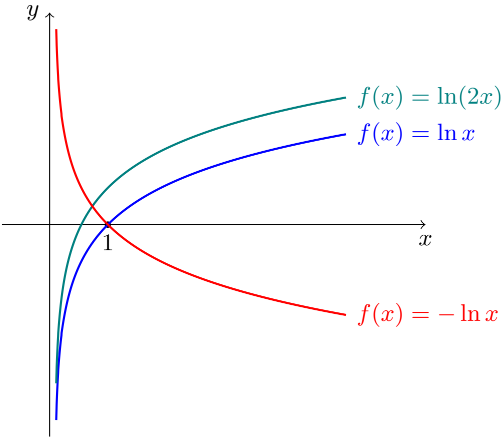
Graf funkcije $f(x) = \log_a x$ u ovisnosti o bazi a:



Logaritamska funkcija

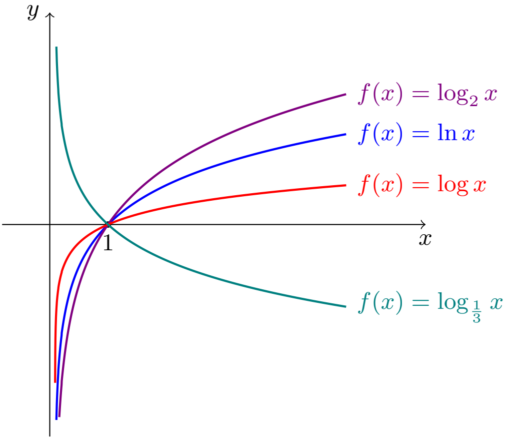
Prirodni logaritam je logaritamska funkcija baze e ($f(x) = \log_e x$) koju označavamo sa

$$f(x) = \ln x.$$



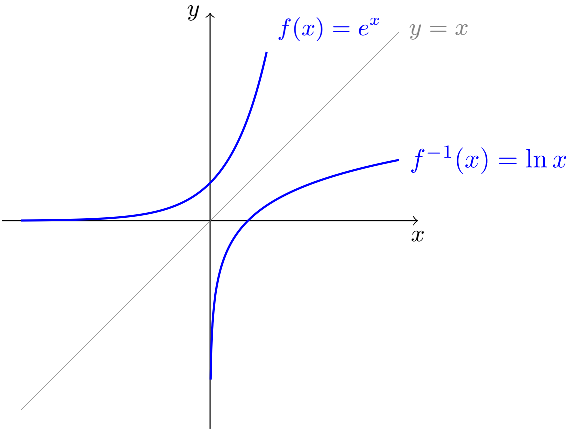
Logaritamska funkcija

Graf funkcije $f(x) = \log_a x$ za različite baze a:



Logaritamska funkcija

- Graf funkcije $f(x) = e^x$ i njene inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \ln x$:



Opće potencije

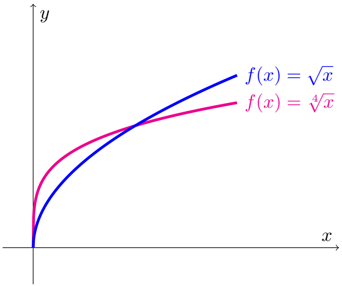
Želimo definirati potenciju x^a, za sve $a \in \mathbb{R}$.

Neka je $a \in \mathbb{Z}$:

- za $a = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow\; x^a$ je polinom $(x^0, x^1, x^2, \dots)$
- za $a = -1, -2, -3, \cdots \Rightarrow\; x^a$ je racionalna funkcija $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots\right)$

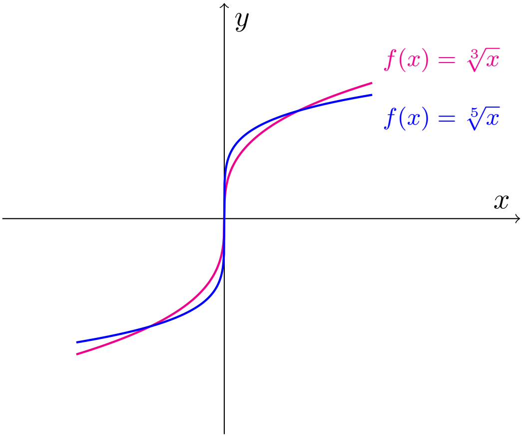
Za potenciju oblika $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 1 \;\Rightarrow\; x^a = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Grafovi korijena za parne prirodne brojeve:



Opće potencije

Grafovi korijena za neparne prirodne brojeve:



Opće potencije

Za $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ definiramo x^a kao:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Takva funkcija je definirana:

- za sve $x \in \mathbb{R}$ ako je n neparan
- samo za $x \geq 0$ ako je n paran

Za općeniti $a \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ funkciju $f(x) = x^a$ definiramo kao:

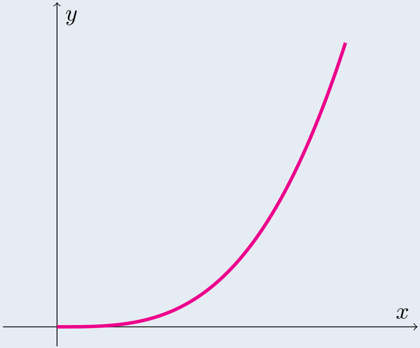
$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Takva se funkcija naziva *opća potencija*.

Primjer 4

Nacrtajmo funkciju $f(x) = x^{\pi}$.

$x^{\pi} = e^{\pi \ln x}$ *izgleda slično kao* x^3, *ali je definirana samo za* $x > 0$*!*

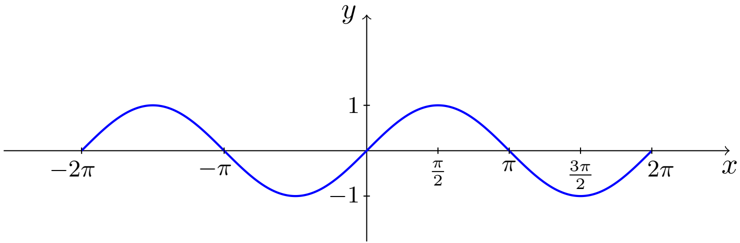


Trigonometrijske funkcije

▷ Skupina periodičkih funkcija: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$

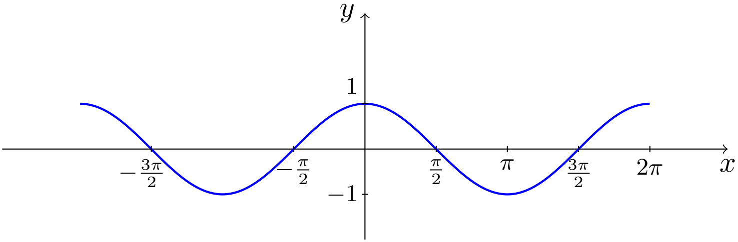
sinus $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \; f(x) = \sin x$

- neparna funkcija: $\sin(-x) = -\sin x$
- temeljni period je 2π: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$



kosinus $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \ f(x) = \cos x$

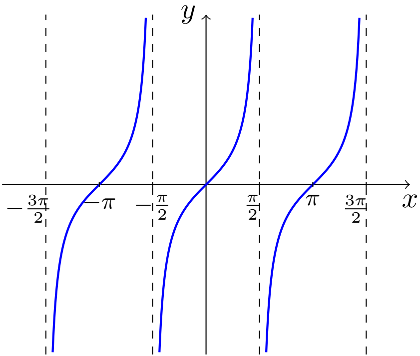
- parna funkcija: $\cos(-x) = \cos x$
- temeljni period je 2π: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$



Trigonometrijske funkcije

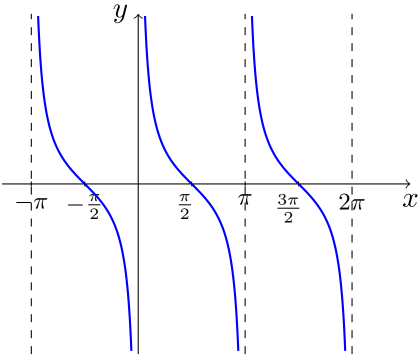
tangens $f:\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

- neparna funkcija: $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$
- temeljni period je π: $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x, x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$



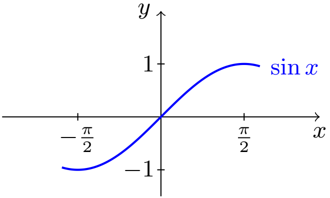
kotangens $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

- neparna funkcija: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
- temeljni period je π: $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$



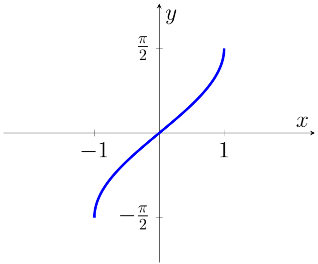
Ciklometrijske funkcije

▷ inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija (tj. njihovih restrikcija)

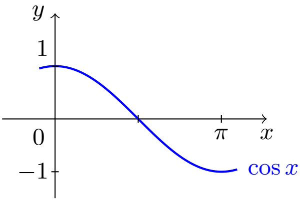


$\Longrightarrow$ restrikcija funkcije $\sin x$ na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je bijekcija i slika joj je interval $[-1, 1]$

Inverzna funkcija je tada **arkus sinus** $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

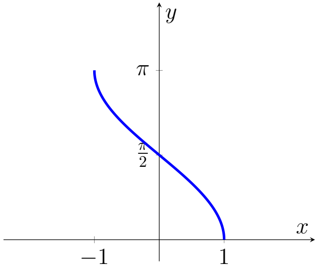


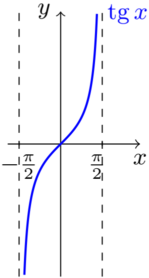
Ciklometrijske funkcije



$\Longrightarrow$ restrikcija funkcije $\cos x$ na interval $[0, \pi]$ je bijekcija i slika joj je interval $[-1, 1]$

Inverzna funkcija je tada **arkus kosinus** $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$



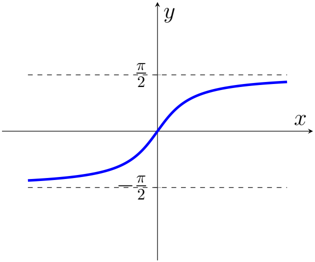


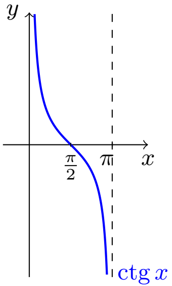
restrikcija funkcije $\operatorname{tg} x$ na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je bijekcija i slika joj je cijeli skup $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$

Inverzna funkcija je tada **arkus tangens**

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



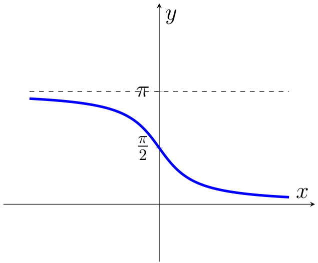


$\Longrightarrow$

restrikcija funkcije $\operatorname{ctg} x$ na interval $\langle 0, \pi \rangle$ je bijekcija i slika joj je cijeli skup $\mathbb{R}$

Inverzna funkcija je tada **arkus kotangens**

$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle$



Sinusoide

Sinusoida je graf funkcije oblika

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi), \ \ A > 0, \omega > 0.$$

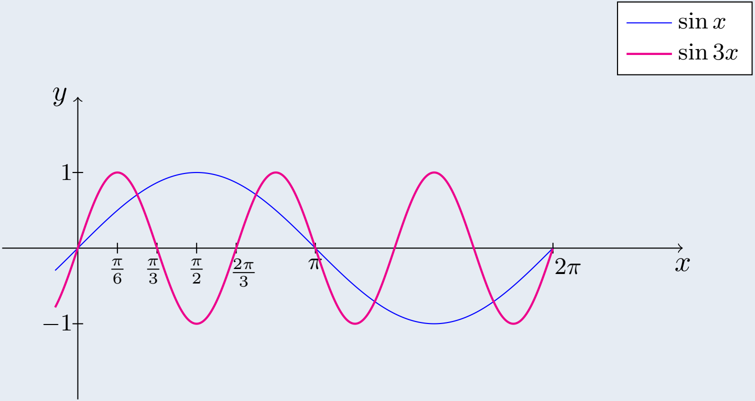
- broj A je amplituda i vrijedi $f : \mathbb{R} \to [-A, A]$
(graf funkcije se nalazi između pravca $y = -A$ i $y = A$)
- temeljni period funkcije je $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- $\dfrac{\varphi}{\omega}$ je pomak duž x-osi (ulijevo ako je $\varphi > 0$, udesno za $\varphi < 0$)

Napomene:

• graf funkcije $-f$ simetričan je grafu od f s obzirom na x-os
• sve isto vrijedi i za funkciju $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ (kosinusoida)
• možemo iskoristiti parnost i neparnost funkcija ako je varijabla pomnožena negativnim brojem

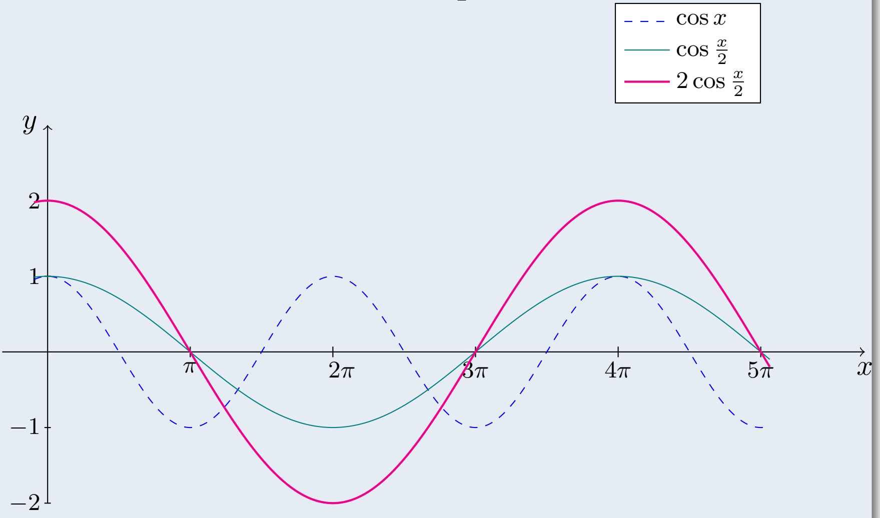
Zadatak 5

Skicirajte graf funkcije $f(x) = \sin 3x$.



Zadatak 6

Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$.



Zadatak 7

Skicirajte graf funkcije $f(x) = -3\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.